Title	代数によるアローの定理の別証明 The Algebraic Proof of Arrow’s Impossibility Theorem
Author(s)	入谷　純・加茂　知幸 (Jun Iritani・Tomoyuki Kamo)
Citation	大阪学院大学　経済論集（THE OSAKA GAKUIN REVIEW OF ECONOMICS), 第 29 巻第 1-2 号 : 1-15
Issue Date	2016.1.31
Resource Type	Article/ 論説
Resource Version	
URL	
Right	
Additional Information	

大阪学院大学経済論集
第29巻第1・2号、2016年1月

代数によるアローの定理の別証明*

入　谷　　純†
加　茂　知　幸‡

要　旨

アロー的社会的選択理論を記述する組織的な新たな用具を代数によって提供する。それを用いて不可能性定理に新たな別証明を与える。選好とアロー的な議論における諸概念を、可換環における方程式によって表現する。その結果、代数的演算の帰結としてアローの定理が得られることを示す。新しい証明においては、これまで鍵概念であるとされてきた「決定権を有するグループ（decisive group）」は用いられない。

キーワード：アローの不可能性定理、選好の推移性、可換代数、代数方程式
JEL分類番号：D71, D72.

＊本稿は、久我清先生が大阪学院大学をご退職されるのに際して、先生より多大な学恩を頂いた者として、編集委員会よりご退職記念号にご招待を頂いたものである。先生のますますのご活躍を祈念するとともに、寄稿させて頂けることに深く感謝申し上げたい。

†神戸大学名誉教授、e-mail：iritani@econ.kobe-u.ac.jp
‡京都産業大学教授、e-mail：kamo@cc.kyoto-su.ac.jp

1　序

現在の社会的な意思決定は代議制に基づき、代議制は多数決投票によっている。しかしながら、投票にはパラドックスがあることが知られている。すなわち、個人の選好が多様である場合には、多数決によって定められる社会的「順序」は必ずしも推移性を満たさないのである。これに対して、Kuga and Nagatani［6］では、社会的合意形成メカニズムとして多数決投票を前提とする時、投票のパラドックスを回避するには、個人の選好の多様性がどの程度まで許容できるかという問題を取り扱っている。Kuga and Nagatani［6］は、選好プロファイルの多様性の程度（antagonism intensity）と投票のパラドックが起こる程度（paradox guage）との間には正の相関関係があることを証明した。この結果は社会的選択理論においては数少ない可能性定理と呼ばれるべきもので、久我教授の社会的選択理論への目覚ましい貢献のひとつである。

一方、投票のパラドックスに現れる「不可能性」という現象は、現在、社会的選択理論におけるメインなテーマである。そこでは、社会的な合意形成メカニズムとして多数決投票以外でより一般的なものを考えたとしても、この種のパラドックから逃れることは論理的に不可能であることが示さている。

社会的選択理論は、Arrow, Sen and Suzumura［2］、［3］そして Moulin［8］に見るように、現在最も目覚ましい発展を示している経済学の一つの分野である。Arrow［1］に代表される初期のアロー的議論の設定は必ずしも現在の社会的選択理論の中心的な場面設定ではない。しかしながら、アローの不可能性定理は、経済学以外の分野への影響をも含めてまだなお光彩を放っている。

アローの定理の特徴は、その基づいている議論の初等性にある。つまり、対偶や背理法といった論理を理解できる者であれば、彼／彼女が高校生であっても、アローの定理の論理を追うことは原則的に可能となっている。そのような初等的な議論により、極めて重大な事実「社会的な合意形成の不可能性」が示

されていることが一つの特徴である。

一方、この特徴は定理の証明を複雑にするという側面を持つ。言い換えると、証明のプロセスは複雑で全体を明瞭に見渡すことが困難となる。そのために、Fishburn and Rubinstein［4］やGeanakoplos［5］にあるように、いくつかの別証明が提案されている。別証明を与えることのメリットはいくつかある。一つは証明の簡明化である。第二は、定理を成立させる根拠が、すなわち、これまでの証明において重要な役割を演じた主たる概念が本来的に重要であるのか否かを検証できることである。第三は、その分野を効果的に記述することのできる用具の提供である。

本稿の目的は、アローの定理への別証明をいま一つ与えることである。われわれは、アローの定理を記述する言語として代数を利用する[1)]。最初に、われわれは選好を四則演算による方程式によって与え、最終的に、代数的演算によってアローの定理を導く。さらに、古典的証明においては、決定力を有するグループ（decisive group）の存在が鍵概念であった。一方、代数的証明においては、決定力を有するグループの役割はなく、非本質的であることが示される。

2　諸概念の代数化

選択対象の集合を、$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, 2, \ldots, m\}, m \geqq 3$、個人のインデックスの集合を $N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$ とする。A の要素はアルファベットの a, b, c, d を、N の要素には i, j, k, h を用いる[2)]。

1）Fishburn and Rubinstein［4］でも代数的な枠組みが利用されているが、代数の本質である演算には役割を与えていない。本稿では、代数的演算により一層の役割を与える。
2）記号 $\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ は左辺の記号が右辺によって定義されていることを表す。

2.1 選好

A 上の可能なあらゆる完備で推移的かつ厳密な選好（complete transitive and strict preferences）の集合を $\mathfrak{P}$ と書く。A の異なる 2 個の要素のすべての順序対からなる集合を Z_2 とする。選好 $\prec$ は Z_2 の部分集合である。$\prec \in \mathfrak{P}$ に対して、関数 $p: Z_2 \to \{0,1\}$ を

$$p(a,b) = 1 \text{ if } (a,b) \in \prec \tag{1}$$
$$p(a,b) = 0 \text{ if } (b,a) \in \prec \tag{2}$$

と定義する。p と $\prec$ を同一視する。以下では、記号 p を $p \in \mathfrak{P}$のように選好とともに、$p = p(\eta)_{\eta \in Z_2}, p(\eta) \in \{0,1\}$ という関数としても用いる。

ここで、集合 $\{0,1\}$ に演算 $(+,\cdot)$ を

$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0$$
$$1\cdot 1=1,\ 1\cdot 0=0\cdot 1=0,\ 0\cdot 0=0$$

を導入すると、$(\{0,1\},+,\cdot)$ は可換環（commutative ring）となる[3)]。つまり、通常の分配則や結合則が成立する。A の任意の 3 個の異なる要素を a,b,c とする。$p \in \mathfrak{P}$ とする時、p の推移性は、乗算と加算を用いて、

$$\begin{cases} p(a,b)\cdot p(b,c)\cdot p(c,a) = 0 \text{ and} \\ (1+p(a,b))\cdot(1+p(b,c))\cdot(1+p(c,a)) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

と代数的に表される。以下、積の演算記号“·”は省略される。(3)が成立するのは次の表から明らかである。

3）Lang［7］を参照せよ。

$$(a,b) \in p \ \wedge \ (b,c) \in p \quad \Rightarrow \quad (a,c) \in p$$

$p(a,b)$	$p(b,c)$	$p(c,a)$	T
1	1	1	×
1	1	0	○
1	0	1	○
1	0	0	○

$p(a,b)$	$p(b,c)$	$p(c,a)$	T
0	1	1	○
0	1	0	○
0	0	1	○
0	0	0	×

表 1

表中の○印は推移律が成立するケースを示している。表より、$p(a,b), p(b,c)$, $p(c,d)$ の値が全て 0 あるいは 1 である場合が推移性を満たさないことが判る。⑶は表の○印を許容する必要十分条件である。

2.2　社会厚生関数

さらに、$\{0,1\}^N$ にも群の構造を入れる。すなわち、$x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n) \in \{0,1\}^N$ について、

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

とする。空間 $(\{0,1\}^N,+)$ は群である。

$P \stackrel{\text{def}}{=} (p_1,p_2,\ldots,p_n) \in \mathfrak{P}^N$ は n 人の個人の選好プロファイルを表す。これらは、

$$P=(P(\eta))_{\eta \in Z_2},$$
$$P(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1(\eta),\ldots,p_n(\eta)) \in \{0,1\}^N, \eta \in Z_2.$$

と見ることができる。社会厚生関数 f は定義域を $\mathfrak{P}^N$ とし値域を $\mathfrak{P}$ とする関数で、

$$f:(p_1,\ldots,p_n) \in \mathfrak{P}^N \ \mapsto \ f(p_1,\ldots,p_n) \in \mathfrak{P}$$

と表される。われわれは、$f(p_1,\ldots,p_n)$ において、

$$f_\eta(p_1,\ldots,p_n) \stackrel{\text{def}}{=} f(p_1,\ldots,p_n)(\eta) \in \{0,1\},\ \eta \in Z_2$$

と書く。

2.3　社会厚生関数の諸性質

社会厚生関数 f は可能な選好プロファイル $P \in \mathfrak{P}^N$ に対して、$\mathfrak{P}$ に値をとる。したがって、社会的選好 $f(P)$ は推移的である。よって、任意の異なる $a,b,c \in A$ について、

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f(P)(a,b),\ \ \beta \stackrel{\text{def}}{=} f(P)(b,c),\ \ \gamma \stackrel{\text{def}}{=} f(P)(c,a)$$

とすれば、(3)によって、

$$\alpha\beta\gamma = 0,\ \ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 0$$

を満たさねばならない。

社会厚生関数 f が**独立性（indepencence of irrelevant alternatives, IIA）**を満たすとは、任意の選好プロファイル $P=(p_1,\ldots,p_n),\ P'=(p'_1,\ldots,p'_n)$ を選ぶとき、任意の $\eta \in Z_2$ について

$$f_\eta(P) = f_\eta(P') \ \ \text{if}\ \ p_j(\eta) = p'_j(\eta),\ \forall j = 1,2,\ldots,n$$

となることである。独立性は $f_\eta(P)$ の値が各構成員の η への選好 $(p_1(\eta),\ldots,$ $p_n(\eta)), p_i(\eta) \in \{0,1\}, i=1,2,\ldots,n$ にのみ依存することを意味する。すなわち、独立性によって、

$$f_\eta(P) \text{を} f_\eta(P(\eta))$$

と書くことができる。したがって、独立性の下では、f_η は $\{0,1\}^N$ で定義され

$\{0,1\}$ の値を取ると見なすことができる。

社会厚生関数 f が**全員一致性**（**unanimity**）を満たすとは、任意の $P \in \mathfrak{P}^N$ と任意の $\eta \in Z_2$ について、

$$P(\eta) = \mathbf{1} = (1,\ldots,1) \text{ ならば } f_\eta(P) = 1 \text{ かつ}$$
$$P(\eta) = \mathbf{0} = (0,\ldots,0) \text{ ならば } f_\eta(P) = 0$$

を満たすことである。

社会厚生関数 f において、個人 $i, (i \in N)$ が**独裁者**（**dictator**）であるとは、

$$\forall P = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathfrak{P}^N,\ \forall (a,b) \in Z_2\ (p_i(a,b) = f(P)(a,b))$$

となることである。

本稿では、社会厚生関数に以下の性質を課す。

仮定　社会厚生関数 f の定義域は $\mathfrak{P}^N$ であり、独立性および全員一致性を満たす。

3　アローの定理

次の関数を導入する。

$$r : (x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^N \mapsto (y_1,\ldots,y_n) \in \{0,1\}^N,$$
$$\text{where } x_j \neq y_j\ \forall j \in N.$$

定義 1　$m \geqq 3$ であるとする。数値の並び、$x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n)$, $z = (z_1,\ldots,z_n), x, y, x \in \{0,1\}^N$ が選好プロファイル $P \in \mathfrak{P}^N$ に**許容可能であるとは**、任意の異なる選択対象 $a, b, c \in A$ について、

$$x = P((a,b)),\ y = P((b,c)),\ z = P((c,a))$$

となることである。$x, y, x \in \{0,1\}^N$ がある選好プロファイルに許容可能であるとき、単に許容可能であるという。

補助定理 1　$m \geqq 3$ であるとする。組 $(x, y, z), x, y, x \in \{0,1\}^N$ が許容可能である必要十分条件は、

$$x_i y_i z_i = 0,\ (1 + x_i)(1 + y_i)(1 + z_i) = 0,\ \forall i \in N \tag{4}$$

である。

［証明］任意の異なる選択対象 $a, b, c \in A$ を選ぶ。$\eta = (a, b), \eta' = (b, c), \eta'' = (c, a)$ とする。任意の $i \in N$ について関数 $\phi_i : Z_2 \to \{0,1\}$ を次のように定義する。

$$\phi(\eta) = x_i,\ \phi(\eta') = y_i,\ \phi(\eta'') = z_i$$

とする。$A \setminus \{a, b, c\}$ は有限個であるから、番号に対応させて $\{d_4, \ldots, d_m\}$ とする。(x_i, y_i, z_i) のとる値の可能性は(3)より $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)(1,1,0)$ の 6 通りである。$(x_i, y_i, z_i) = (0,0,1)$ の場合を考察しよう。$d_1 = a, d_2 = b, d_3 = c$ とするとき

$$\begin{aligned} &\phi_i((d_{t'}, d_t)) = 1, \quad \phi_i((d_t, d_{t'})) = 0, \quad \text{if } t < t' \\ &\phi_i((d_{t'}, d_t)) = 0, \quad \phi_i((d_t, d_{t'})) = 1, \quad \text{if } t' < t \end{aligned}$$

と定義すれば、$\phi_i \in \mathfrak{P}$ である。これは番号の後の選択対象よりも先のものを好むという選好である。他の場合も同様に処理できる。さらに、他の $j \in N$, $j \neq i$ についても同様の議論ができる。

補助定理 2　$m \geqq 3$ とする。任意の異なる選択対象 $a, b, c \in A$ にたいし、

$\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a,b), \eta' \stackrel{\mathrm{def}}{=} (b,c), \eta'' \stackrel{\mathrm{def}}{=} (c,a), \eta, \eta', \eta'' \in Z_2$とする。$f$を社会厚生関数とすれば、任意の$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^N$にたいして、

$$f_\eta(x) + f_{\eta'}(r(x)) = 1, \ \forall x \in \{0,1\}^N \tag{5}$$

である。さらに、$\{i \in N | x_i = y_i = 1\} = \emptyset$を満たす任意の$x, y \in \{0,1\}^N$について、

$$f_\eta(x) \cdot f_{\eta'}(y) = 0 \tag{6}$$
$$\{1 + f_{\eta''}(r(x+y))\}\{1 + f_\eta(x)\}\{1 + f_{\eta'}(y)\} = 0 \tag{7}$$
$$f_{\eta''}(r(x+y)) f_\eta(x) = 0 \text{ かつ } f_{\eta''}(r(x+y)) f_\eta(y) = 0 \tag{8}$$

が成立する。

［証明］任意の異なる$a, b, c \in A$について、$\eta = (a,b), \eta' = (b,c), \eta'' = (c,a)$とする。$x \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^N$を任意に選んでおく。補助定理1により、二つの組$(x, r(x), \mathbf{0}), (x, r(x), \mathbf{1})$は許容可能である。選好プロファイル$\hat{P}, \tilde{P}$が存在して、$\hat{P}(\eta) = \tilde{P}(\eta) = x, \hat{P}(\eta') = \tilde{P}(\eta') = r(x), \hat{P}(\eta'') = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\tilde{P}(\eta'') = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$である。$f(\tilde{P})$と$f(\hat{P})$の推移性と$f$の全員一致性から、

$$f_\eta(x) f_{\eta'}(r(x)) 1 = 0 \text{ かつ } (1 + f_\eta(x))(1 + f_{\eta'}(r(x)))(1+0) = 0$$

となる。展開して整理すると$f_\eta(x) + f_{\eta'}(r(x)) = 1$が得られる。

さらに、$\{i \in N | x_i = y_i = 1\} = \emptyset$を満たす任意の$x, y \in \{0,1\}^N$にたいして、組$(x, y, \mathbf{1})$は許容可能であるので、ある$P \in \mathfrak{P}^N$が存在して、$P(\eta) = x$, $P(\eta') = y, P(\eta'') = \mathbf{1}$を満たす。よって、$f_\eta(x) \cdot f_{\eta'}(y) \cdot 1 = 0$である。これは(6)である。同様に、組$(x, y, r(x+y))$も許容可能であるので、$(1 + f_{\eta''}(r(x+y)))(1 + f_\eta(x))(1 + f_{\eta'}(y)) = 0$である。最後に、組$(x, \mathbf{1}, r(x+y))$は許容可能であるので、$f_\eta(x) f_{\eta''}(r(x+y)) = 0$。同一の議論を許容可能な組

$(y, \mathbf{1}, r(x+y))$ に対して行えば、(8)の第二の等式が得られる。

補助定理 3　f を任意の社会厚生関数とする。任意の選択対象の組 $\mu = (a, b)$, $\lambda = (b, a), \mu' = (a', b'), \mu, \lambda, \mu' \in Z_2$ について、

$$f_\mu(x) + f_\lambda(r(x)) = 1,\ \forall x \in \{0,1\}^N \tag{9}$$

$$f_\mu(x) + f_\mu(r(x)) = 1,\ \forall x \in \{0,1\}^N \tag{10}$$

$$f_\mu(x) = f_{\mu'}(x),\ \forall x \in \{0,1\}^N \tag{11}$$

が成立する。

［証明］$x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^N$ を任意に選んでおく。
$f(P)$ は推移律を満たす選好であるので、f の独立性より、異なる選択対象 a, b について、

$$f_{(a,b)}(x) \neq f_{(b,a)}(r(x))$$

は自明である。これは(9)である。任意の異なる a, b, c について、$\eta = (a, b)$, $\eta' = (b, c), \eta'' = (c, a)$ とする。Lemma 2 の(5)より、

$$f_\eta(x) + f_{\eta'}(r(x)) = 1$$

が成立する。$r(r(x)) = x$ であるから、同様にして、

$$f_{\eta'}(r(x)) + f_{\eta''}(x) = 1$$
$$f_{\eta''}(x) + f_\eta(r(x)) = 1$$
$$f_\eta(r(x)) + f_{\eta'}(x) = 1$$

が成立する。以上によって、

$$\begin{aligned} f_\eta(x) + f_\eta(r(x)) &= 1 \\ f_\eta(x) = f_{\eta''}(x) &= f_{\eta'}(x) \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる。⑿は⑾の一部である。最初の式は⑽である。

さて、⑾で残されているものは

［ケース１］：$\eta = (a, b), \eta' = (a, c)$ の場合、
［ケース２］：$\eta = (a, b), \eta' = (b, a)$ の場合、
［ケース３］：$a, b, c, d \in A$ を異なる選択対象とするとき、
$\eta = (a, b), \eta' = (c, d)$ となる場合、

である。それぞれについて考察する。

［ケース１］⑿の最初の等式より、$f_{(a,b)}(x) = f_{(c,a)}(x)$ である。(c, a) について⑽を適用して、$f_{(c,a)}(x) + f_{(c,a)}(r(x)) = 1$ である。さらに、⑼によって $f_{(c,a)}(r(x)) + f_{(a,c)}(x) = 1$ であるから、$f_{(a,b)}(x) = f_{(a,c)}(x)$ である。

［ケース２］⑼と⑽によって $f_{(a,b)}(x) = f_{(b,a)}(x)$ が成立する。

［ケース３］$(a, b), (b, c)$ そして $(b, c), (c, d)$ について⑿より、$f_{(a,b)}(x) = f_{(b,c)}(x)$ かつ $f_{(b,c)}(x) = f_{(c,d)}(x)$ より確立される。

⑾を見ると、

$$f_\mu = f_{\mu'},\ \forall\mu, \forall\mu' \in Z_2$$

が成立している。これは従来より、**中立性（neutrality）**と呼ばれてきた性質である。これより、$g \overset{\text{def}}{=} f_\eta, \eta \in Z_2$ とすることができる。g によって、これまでの諸補助定理の結果を表現すれば、⑸、⑼、⑽は

$$g(x) + g(r(x)) = 1,\ \forall x \in \{0, 1\}^N \tag{13}$$

となる。また(6)、(7)、(8)については、(10)と(11)を用いると、次のように言い換えられる。$\{i \in N | x_i = y_i = 1\} = \emptyset$ を満たす任意の $x, y \in \{0,1\}^N$ について、

$$g(x)g(y) = 0 \tag{14}$$

$$g(x+y)(1+g(x))(1+g(y)) = 0 \tag{15}$$

$$(1+g(x+y))g(x) = 0 \text{ かつ } (1+g(x+y))g(y) = 0 \tag{16}$$

である。

補助定理 4　$\{i \in N |\ x_i = y_i = 1\ \} = \emptyset$ を満たす任意の $x, y \in \{0,1\}^N$ について、

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

が成立する。

［証明］(13)、(14)、(15)、(16)より

$$\begin{aligned} 0 &= g(x+y)(1+g(x))(1+g(y)) \\ &= g(x+y) + g(x+y)g(x) + g(x+y)g(y) \\ &= g(x+y) + g(x) + g(y) \end{aligned}$$

である。$g(x+y) + g(x+y) = 0$ であるから、補助定理 4 が成立する。

新たな記号 $e_i, i \in N$ を $e_i \in \{0,1\}^N$ で $e_{ii} = 1$ かつ $i \neq j, j \in N$ ならば $e_{ij} = 0$ を満たすものとする。

補助定理 5　個人 i が独裁者となる必要十分条件は、(i) e_i に対して $g(e_i) = 1$ であり、かつ (ii) $x_i = 0$ を満たす任意の $x \in \{0,1\}^N$ にたいし、$g(x) = 0$ すなわち $g(x)$ が零元となることである。

［証明］i を独裁者とする。$g(e_i)=1$ は明らかである。さらに、補助定理 4 により、$x\in\{0,1\}^N$ かつ $x_i=0$ となる任意のベクトル x について、$1=g(e_i+x)$ $=g(e_i)+g(x)$ である。よって、$g(x)=0$ である。
逆に、任意の $y\in\{0,1\}^N$ について、$y_i=0$ であれば、$g(y)=0$ である。また、$y_i=1$ であれば、$y=e_i+x$ となる $x\in\{0,1\}^N$ が存在して、$x_i=0$ を満たす。よって、補助定理 4 より $g(y)=g(e_i+x)=g(e_i)+g(x)=1$ となる。これは i が独裁者であることを示している。

定理 1（不可能性定理） ある個人 i が一意に存在して、$i\in N, g(e_i)=1$ である。また、$x_i=0$ を満たす任意の $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^N$ について $g(x)=0$ である。

［証明］補助定理 4 より $1=g(\mathbf{1})=g(e_1)+\cdots+g(e_n)$ であるので、ある i について $g(e_i)=1$ でなければならない。$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^N$ を $x_i=0$ となるベクトルとする。⒁より $g(e_i)g(x)=0$、よって、$g(x)=0$ である。補助定理 5 より i は独裁者である。i の一意性は自明である。

以上の補助定理と定理の証明において、決定力を有するグループにかかわる議論が必要とされていないことに注意せよ。

参考文献

［1］Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values*（2nd. edition）, Wiley,（1963）.
［2］Arrow, K.J., A. K. Sen and K.Suzumura: *Handbook on Social Choice and Welfare,* Volume 1, Amsterdam, North-Holland,（2002）.
［3］Arrow, K.J., A. K. Sen and K.Suzumura: *Handbook on Social Choice and Welfare,* Volume 2, Amsterdam, North-Holland,（2010）.
［4］Fishburn, P. and A. Rubinstein: "The Algebraic Aggregation Theory", *Journal of Economic*

Theory, 38 (1986), 63-78.

[5] Geanakoplos, J.: "Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem", *Economic Theory*, 26 (2005), 211-215.

[6] Kuga, K. and H. Nagatani: "Voter Antagonism and the Paradox of Voting", *Econometrica*, 42 (1974), 1045-67.

[7] Lang, S.: *Algebra*, Addison-Wesley, (1965).

[8] Moulin, H.: *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge, (1988).

The Algebraic Proof of Arrow’s Impossibility Theorem

Jun Iritani・Tomoyuki Kamo

ABSTRACT

We introduce a new algebraic tool in social choice theory. In our framework, transitive preference relations are represented by solutions of algebraic equations over a finite field. We give an algebraic proof of Arrow’s impossibility theorem. The method of proof does not utilize the decisive structure in the social welfare function.

Keywords：Arrow’s impossibility theorem; transitivity of preference relations; commutative algebra; algebraic equations.

JEL Classification Numbers：D71; D72.